Ein Problem

der

Variations-Rechnung.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Dr. phil. **Hermann Müller**
Berlin.

Rostock.
Carl Boldt's Buchdruckerei.
1875.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0097

Es kommt oft vor, daß ein Integral z. B. $\int f\,dx$, wo f nicht allein x, sondern noch andere von x abhängige Variablen y, z ... und $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ ... enthält, derartig geändert werden soll, daß die Functionen von y und z, welche von x abhängig sind, ihren Ausdruck ändern, dann muß man diesen Größen y, z ... einen Zuwachs geben, der selbst eine Function von x ist. Hierher gehören besonders die Fragen über Maxima und Minima der Integrale, daher wird auch die Variations-Rechnung häufig Theorie der Maxima und Minima genannt. Ich habe mir zur Aufgabe gestellt, an einem bestimmten Beispiele die Zwecke der Variations-Rechnung zu erläutern.

Unter allen Körpern, welche durch Umdrehung einer Kurve um eine Axe entstehen und dasselbe Volumen haben, soll derjenige ermittelt werden, welcher auf einen Massenpunkt der Rotationsaxe die stärkste Anziehung ausübt, wenn vorausgesetzt wird, daß der Körper jedesmal homogen mit Masse erfüllt sei und daß das Newton'sche Gesetz gelte für die Massenanziehung.

Da die Körper, welche durch Rotation um eine Axe entstehen, der gestellten Aufgabe nach dasselbe Volumen besitzen sollen, so ist dieses constant, und da zu ermitteln ist, welcher von allen möglichen Körpern auf einen Massenpunkt der Rotationsaxe die stärkste Anziehung ausübt, so soll diese Anziehungskraft ein Maximum werden.

Zunächst ist das Volumen eines Rotations-Körpers für eine beliebige Meridiancurve zu entwickeln. Man erhält dasselbe, wenn man ein Volumenelement ausdrückt und dreimal integrirt.

Es mögen folgende Bezeichnungen gelten:
Gleichung der Meridiancurve:

$$r = f(c).$$

Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der anziehenden Masse: a, b, c;
die eines angezogenen Punktes: x, y, z.
Die Rotationsaxe sei c.

Das Volumenelement eines Rotationskörpers ist ein Cylinderringstück, welches als Prisma von der Höhe dc und der Grundfläche r dr $d\varphi$ anzusehen ist. Die Grundfläche ist nämlich ein Ringstück, also die Differenz zweier Sectoren mit den Radien r und r + dr und dem Centriwinkel φ, also:

$$\left(r + dr\right)^2 \frac{d\varphi}{2} - r^2 \frac{d\varphi}{2} = r\, dr\, d\varphi.$$

Demnach ist ein Volumenelement durch:

$$r\, dr\, d\varphi\, dc$$

auszudrücken.

Das Volumen des Rotationskörpers entsteht durch Integration

von 0 bis 2π nach $d\varphi$,
von 0 bis r nach dr und
von c_0 bis c_1 nach dc.

c_0 und c_1 sind die aus der Curve zu bestimmenden äußersten Werthe, für welche r noch positiv ist.

Bezeichnet v das Volumen des Rotationskörpers, so erhält man:

$$v = \int_{c_0}^{c_1} \int_0^r \int_0^{2\pi} d\varphi\, r\, dr\, dc$$

$$= \pi \int_{c_0}^{c_1} r^2\, dc.$$

Welchen Werth dieses Integral erhält, hängt von der Beschaffenheit der Meridiancurve ab, deren Form ermittelt werden soll.

Nun ist die Anziehungskraft des Rotationskörpers auszudrücken, daher sind zunächst die Componenten derselben für ein Element zu bestimmen.

Bezeichnet h die Dichtigkeit,
M die Masse,
K die Kraft,
ϱ die Entfernung

des anziehenden Punktes von dem angenommenen, so ist:

$$M = h\, r\, dr\, d\varphi\, dc$$

$$K = \frac{h r\, dr\, d\varphi\, dc}{\varrho^2}$$ da das Newton'sche Gesetz der Anziehung gelten soll und es folgt:

für die X-Componente des Elements:

$$\frac{h r\, dr\, d\varphi\, dc}{\varrho^2} \cdot \frac{a - x}{\varrho};$$

für die Y-Componente:

$$\frac{h r\, dr\, d\varphi\, dc}{\varrho^2} \cdot \frac{b - y}{\varrho}$$

und

für die Z-Componente:

$$\frac{h r\, dr\, d\varphi\, dc}{\varrho^2} \cdot \frac{c - r}{\varrho}.$$

Denken wir uns nun den angenommenen Punkt als Anfangspunkt, so folgt daraus:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

und da $\varrho^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$, so ist $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Führen wir Polarcoordinaten ein, so ist:

$$a = r \cos \varphi;$$
$$b = r \sin \varphi;$$

dann ist aber:

$$a^2 + b^2 = r^2, \text{ folglich } \varrho = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Die Componenten der Anziehung eines Elements sind demnach:

Die X-Componente:

$$\frac{h\, r^2\, dr\, d\varphi\, dc\, .\, \cos\varphi}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3};$$

die Y-Componente:

$$\frac{h\, r^2\, dr\, d\varphi\, dc\, \sin\varphi}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3};$$

die Z-Componente:

$$\frac{h\, r^2\, dr\, d\varphi\, dc\, c}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3}$$

und

die Componenten der ganzen Anziehungskraft:

X, Y, Z:

$$X = h \int_{c_0}^{c_1} \int_0^r \int_0^{\pi} \frac{r^2\, dr\, dc \cos\varphi\, d\varphi}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3};$$

d. h. $X = 0$;

$$Y = h \int_{c_0}^{c_1} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{r\, dr\, dc\, c\, d\varphi}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3},$$

d. h. $Y = 0$.

Die X- und Y-Componenten sind demnach nicht weiter in Betracht zu ziehen; es wird vielmehr die Z-Componente die ganze Kraft repräsentiren:

$$Z = h \int_{c_0}^{c_1} \int_0^r \int_0^{3\pi} \frac{r\, dr\, dc\, c\, d\varphi}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3};$$

$$Z = -2\pi h \int_{c_0}^{c_1} \frac{c\, dr}{\sqrt{r^2 + c^2}} + 2\pi h\, (c_1 - c_0).$$

Nun ist die Aufgabe zu lösen:

Welche Relation besteht zwischen r und c, wenn:

$$\int_{c_0}^{c_1} \frac{c\, dc}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$ ein Maximum und wenn

gleichzeitig:

$$\int_{c_0}^{c_1} r^2\, dc \text{ constant sein soll.}$$

Allgemein gilt, wenn:

$$\int a\, dx = \text{constant und}$$

$$\int b\, dx = \begin{cases} \text{Maxim.} \\ \text{Minim.} \end{cases} \text{ sein soll, daß alsdann:}$$

$$A \int a dx + \int b\, dx = \begin{cases} \text{Maxim.} \\ \text{Minim.} \end{cases} \text{ ist; also}$$

$$\int (Aa + b)\, dx = \begin{cases} \text{Maxim.} \\ \text{Minim.} \end{cases}$$

Soll aber ein Integral ein Maximum oder Minimum werden, so läßt sich die zu erfüllende Bedingung ganz allgemein wie folgt entwickeln:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x\, y\, y')\, dx \text{ soll ein Maximum}$$

oder Minimum werden.

Man setzt für y den Werth $y + \lambda\omega$, und für y' den Werth $y' + \lambda\omega'$ ein, dann erhält man:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y + \lambda\omega,\ y' + \lambda\omega')\, dx.$$

Entwickeln wir nach Potenzen von λ, dann ergiebt sich:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(xyy')dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\delta f(xyy')}{\delta y}\omega + \frac{\delta f(xyy')}{dx'}\omega' \right) dx + \frac{\lambda^2}{1.2} \int_{x_0}^{x_1} (\ldots\ldots)\, dx$$

u. s. f.

Wenn nun $V = \begin{cases} \text{Maxim.} \\ \text{Minim.} \end{cases}$ werden soll, muß der Factor bei λ gleich Null werden, also:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\delta f\,(xyy')}{\delta y}\,\omega + \frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y}\,\omega' \right) dx = 0,$$

oder:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta f\,(x\,y\,y')}{\delta y}\,\omega\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta f\,(x\,y\,y')}{\delta y'}\,\omega'\,dx = 0.$$

Zur Auflösung des zweiten Integrals findet die Formel $\int u \frac{dv}{dx}\,dx = u\,v - \int v \frac{du}{dx}\,dx$ Anwendung und wir erhalten:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y'}\,\omega'\,dx = \left[\frac{\delta f\,(xyy')}{\delta y'}\,\omega \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\left\{\frac{df(xyy')}{\delta y'}\right\}\omega\,dx}{dx}$$

und deshalb:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta f\,(xyy')}{\delta y'}\,\omega\,dx + \left[\frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y}\,\omega \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\left\{\frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y'}\right\}\omega\,dx}{\delta y}.$$

Oder:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta f\,(xyy')}{\delta y} - \frac{d\left\{\frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y'}\right\}}{\delta y} \right] \omega\,\delta y + \left[\frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y'}\,\omega \right]_{x_0}^{x_1}.$$

Soll aber eine Summe, deren jeder Summand einen willkürlichen Factor enthält (ω) gleich Null werden, so muß jeder Summand für sich gleich Null sein, demnach:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y} - \frac{d\left\{\frac{\delta f\,(xy\,y')}{\delta y'}\right\}}{dx} \right] \omega\,dx = 0.$$

Der willkürliche Factor ω kann aber auch den Werth der Function unter dem Integralzeichen annehmen und es läge dann der Fall vor:

$$\int a^2\,dx = 0$$

was nur möglich ist, wenn

$$a = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\delta f(xy\,y')}{\delta y'} - \frac{d\left\{\frac{\delta f(xy\,y')}{\delta y'}\right\}}{dx} = 0.$$

Es bleibt jetzt für unseren speciellen Fall folgende Erwägung:

$$\text{Wenn } \int a\,dx = \text{constant}$$

$$\text{und } \int b\,dx = \begin{cases}\text{Maxim.}\\ \text{Minim.}\end{cases}$$

so muß $\int (Aa + b)\,dx$ ein Maximum sein und soll $\int_{x_0}^{x_1} f(xy\,y')\,dx$ ein Maximum sein, so muß die Bedingung

$\frac{\delta f(xyy')}{\delta y} - \frac{d\left\{\frac{\delta f(xy\,y')}{\delta y'}\right\}}{dx} = 0$ erfüllt werden, folglich ist für

$$\int_{r_0}^{r_1} r^2\,dc = \text{constant}$$

$$\text{und } \int_{r_0}^{r_1} \frac{c\,dc}{\sqrt{r^2+c^2}} = \text{Maxim.}$$

die Bedingung zu erfüllen:

$$\int \left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right) dc = \begin{cases}\text{Maxim.}\\ \text{Minim.}\end{cases}$$

also: $$\frac{\delta\left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right)}{\delta r} = 0;$$

da der Differentialquotient der abhängig Variablen nicht vorkommt, so ist hier der Ausdruck:

$$\frac{d\left\{\frac{\delta (xyy')}{\delta y'}\right\}}{dx} = 0.$$

Nun ist:

$$\frac{\delta\left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right)}{\delta r} = 2Ar - \frac{c\,r}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3},$$

demnach muß:

$$2A - \frac{c}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3} = 0 \text{ sein,}$$

wenn $\int_{r_0}^{r_1} r^2\,dc = \text{constant}$

und $\int_{r_0}^{r_1} \frac{c\,dc}{\sqrt{r^2 + c^2}} = \text{Maxim.}$

sein soll.

Diese Bedingung enthält aber noch die beliebig gewählte Constante A.

Zur Eliminirung derselben setzen wir in dem Integral, welches das Volumen ausdrückt, für r^2 den Werth ein und lösen dasselbe auf. Der hierdurch entstehende Ausdruck für A wird alsdann in die Gleichung:

$$2A - \frac{c}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3} = 0$$

substituirt.

Der Werth für r^2 ergiebt sich leicht wie folgt:

$$2A = \frac{c}{(\sqrt{r^2 + c^2})^3}$$

$$r^2 + c^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{2A}\right)^2}$$

$$r^2 = \left(\frac{c}{2A}\right)^{\frac{2}{3}} - c^2$$

Nun war:

$$V = \pi \int_{c_0}^{c_1} r^2\,dc,$$

demnach jetzt:

$$V = \pi \int_{c_0}^{c_1} \left[\left(\frac{c}{2A} \right)^{\frac{2}{3}} - c^2 \right] dc$$

$$= \left[\frac{3\pi}{5(2A)^{\frac{2}{3}}} c^{\frac{5}{3}} - \frac{\pi}{3} c^3 \right]_{c_0}^{c_1}.$$

Zur Bestimmung der Grenzen c_0 und c_1 ist die Gleichung:

$$r^2 + c^2 = \left(\frac{c}{2A} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ maßgebend.}$$

Also $r^2 = \left(\frac{c}{2A} \right)^{\frac{2}{3}} - c^2$

und daraus folgt:

r ist reell, wenn:

$$\left(\frac{c}{2A} \right)^{\frac{2}{3}} > c^2$$

r ist imaginär, wenn:

$$\left(\frac{c}{2A} \right)^{\frac{2}{3}} < c^2 \text{ und}$$

r ist gleich Null, wenn:

$$\left(\frac{c}{2A} \right)^{\frac{2}{3}} = c^2 \text{ ist.}$$

Daher sind die Grenzen:

wenn $r = 0$, dann ist:

$$c = \sqrt[3]{\frac{c}{2A}}$$

$$c^3 = \frac{c}{2A}$$

also $c = 0$

und $c = \pm \sqrt{\frac{1}{2A}}$.

Die obere Grenze $c_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2A}}$

die untere Grenze $c_0 = 0$.

Demnach ergiebt sich:

$$V = \frac{3\pi}{5(2A)^{\frac{3}{3}}}\left(\sqrt{\frac{1}{2A}}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2A}}\right)^{3}$$

$$= \frac{4\pi}{15(2A)^{\frac{3}{2}}}.$$

Also:

$$(2A)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{15\,v} \quad \text{oder:}$$

$$2A = \left(\frac{4\pi}{15\,v}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Da nun

$$2A = \frac{c}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ war, so erhalten wir:}$$

$$\left(\frac{4\pi}{15\,v}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{c}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

als Gleichung der Meridiancurve.

Also die Gleichung derjenigen Curve, durch deren Rotation ein Körper entsteht, welcher auf einem Massenpunkt der Rotationsaxe die stärkste Anziehung ausübt, lautet:

$$\left(\frac{4\pi}{15\,v}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{c}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder:

$$(r^2 + c^2)^3 = c^2 \sqrt[3]{\left(\frac{15\,v}{4\pi}\right)^4}.$$

Es bleibt nun noch zu constatiren, daß bei

$$2A - \frac{c}{\sqrt{(r^2+c^2)^3}} = 0$$

ein Maximum ist; hierzu ist zu ermitteln, ob das Vorzeichen der 2. Variation negativ ist.

$$V = \int_{c_0}^{c_1} \left(Ar^2 - \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) dc.$$

Es sei $r = r + \omega\lambda$, so ergiebt die Entwickelung nach Potenzen von λ:

$$V = \int_{c_0}^{c_1} \left[\left\{ Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}} \right\} + \lambda \left\{ \frac{d\left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\right)}{dr} \omega \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2}{1.2} \left\{ \frac{d^2\left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\right)}{dr^2} \omega^2 \right\} \ldots \right] dc$$

und es muß bei

$$\lambda \int_{c_0}^{c_1} \frac{d\left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\right)}{dr} \omega \, dc = 0,$$

$$\frac{\lambda^2}{1.2} \int_{c_0}^{c_1} \frac{d^2\left(Ar^2 + \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\right)}{dr^2} \omega^2 \, dc < 0$$

sein.

Aus der ersten Variation geht für $2A$ der Werth $\frac{c}{\sqrt{(r^2+c^2)^3}}$ hervor. Die zweite Variation ergiebt:

$$\frac{\lambda^2}{1.2} \int_{c_0}^{c_1} \left\{ 2A + \frac{3cr^2}{\sqrt{(r^2+c^2)^5}} - \frac{c}{\sqrt{(r^2+c^2)^3}} \right\} \omega^2 \, dc,$$

oder für $2A$ den Werth gesetzt:

$$\frac{\lambda^2}{1.2} \int_{c_0}^{c_1} \frac{3c\,r^2}{\sqrt{(r^2+c^2)^5}} \omega^2 \, dc < 0.$$

Für den Lauf der Curve, also für die Gestalt des Rotationskörpers ergiebt sich aus der Gleichung:

$$(r^2 + c^2)^3 = c^2 \sqrt[3]{\left(\frac{15\,V}{4\pi}\right)^4}$$

folgendes:

Wenn $r = 0$
dann ist $c = 0$

oder auch $= \sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}}$;

die Curve tritt daher im angezogenen Punkte aus der Rotationsaxe heraus und schneidet dieselbe wiederum bei $\sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}} = c$. Der angezogene Punkt liegt also auf der Oberfläche des Rotationskörpers. Aus diesem Grunde ist auch nur ein zweiter Werth für c in Betracht zu ziehen, weil andernfalls zwei Rotationskörper entständen, deren Anziehungen sich gegenseitig aufheben würden.

Zur weiteren Beurtheilung des Laufs der Curve ist der Werth für r zu discutiren.

$$(r^2 + c^2)^3 = c^2 \sqrt[3]{\left(\frac{15\,v}{4\,\pi}\right)^4}$$

$$\text{es sei } \sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}} = b$$

$$\text{also } (r^2 + c^2)^3 = c^2\,b^4$$

$$r^2 = \sqrt[3]{c^2\,b^4} - c^2.$$

Nun soll ermittelt werden, bei welchem Werthe von c r ein Maximum wird.

Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{dr}{dc} = 0 \text{ und } \frac{d^2r}{dc^2} < 0 \text{ ist.}$$

Da $r^2 = \sqrt[3]{c^2\,b^4} - c^2$, so ergiebt sich:

$$r\,\frac{dr}{dc} = \frac{1}{3}\,c^{-\frac{1}{3}}\,b^{\frac{4}{3}} - c$$

$$r\,\frac{d^2r}{dc^2} + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2 = -\frac{1}{9}\,b^{\frac{4}{3}}\,c^{-\frac{4}{3}} - 1$$

$$\frac{d^2r}{dc^2} = -\frac{\frac{1}{9}\,b^{\frac{4}{3}}\,c^{-\frac{4}{3}} + 1 + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2}{r}$$

also ist $\frac{d^2r}{dc^2}$ immer negativ, d. h. r ein Maximum, wenn:

$$\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}} - c = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$3c = c^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}}$$

$$c = \frac{b}{\sqrt[4]{27}}$$

$$c = \frac{\sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}}}{\sqrt[4]{27}}$$

$$c = \frac{1}{3} \sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}}.$$

Bei diesem Werthe von c ist r ein Maximum und der Maximal-Werth für r wird berechnet wie folgt:

$$r^2 = \sqrt[3]{c^2 b^4} - c^2$$

$$c^2 = \frac{1}{9} \sqrt{3} \sqrt[3]{\left(\frac{15\,v}{4\,\pi}\right)^2}$$

$$b^4 = \left(\sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}}\right)^4$$

folglich:

$$r^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9} \sqrt{3} \left(\frac{15\,v}{4\,\pi}\right)^2} - \frac{1}{9} \sqrt{3} \left(\frac{15\,v}{4\,\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$r = \frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}}}.$$

Die größte Entfernung der Curve von der Rotationsaxe ist demnach $\frac{1}{3} \sqrt{2\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{15\,v}{4\,\pi}}}$ und zwar wird dieser Werth für r erreicht, wenn:

$$c = \frac{1}{3} \sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\frac{15v}{4\,\pi}} \text{ ist.}$$

Setzt man $v = 1$, so werden diese Ausdrücke durch folgende Zahlen repräsentirt:

bei $c = 0{,}4653569 \ldots$, ist
$r = 0{,}9871712 \ldots$

Die Anziehung auf den Punkt $\left.\begin{matrix} c = 0 \\ r = 0 \end{matrix}\right\}$ soll nun berechnet werden.

Es war:

$$Z = -2\pi h \int_{c_0}^{c_1} \frac{c\,dc}{\sqrt{r^2 + c^2}} + 2\pi h\,(c_1 - c_0)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2A}}$$

$$c_0 = 0$$

$$\sqrt{r^2 + c^2} = \sqrt[3]{\frac{c}{2A}}$$

folglich:

$$Z = -2\pi h \left\{ \int_{c_0}^{c_1} \frac{c\,dc}{\sqrt[3]{\frac{c}{2A}}} - \sqrt{\frac{1}{2A}} \right\}$$

$$Z = \frac{4}{5}\pi h \sqrt{\frac{1}{2A}}.$$

Da $2A = \left(\frac{4\pi}{15\,v}\right)^{\frac{2}{3}}$ so erhält man:

$$Z = \frac{4\pi h}{5} \left(\frac{4\pi}{15\,v}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Wenn für v der Werth 1 ebenso für h 1 angenommen wird, so erhält man $Z = \frac{4\pi}{5} \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$ und es wird die ganze Anziehungskraft durch die Zahl:

$2{,}666042 \ldots$

vorgestellt.

Um einen Vergleich mit der Anziehungskraft einer Kugel von demselben Volumen auf einen der beiden Axenpunkte,

welche in der Oberfläche liegen, anzustellen, möge ebenfalls $v = 1$ und $h = 1$ sein. Die Anziehungskraft der Kugel auf einen Punkt der Rotationsaxe ist:

$$-\frac{vh}{z^2},$$ wobei z die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt vorstellt, also hier $= r$ ist.

Demnach:

$$Z = -\frac{1}{r^2};$$

da aber $\frac{4\,r^3\pi}{3} = v = 1$ ist, so ist $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$, mithin:

$$Z = \frac{4\pi}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}\pi^2}$$

$$= 2{,}598518\ldots$$

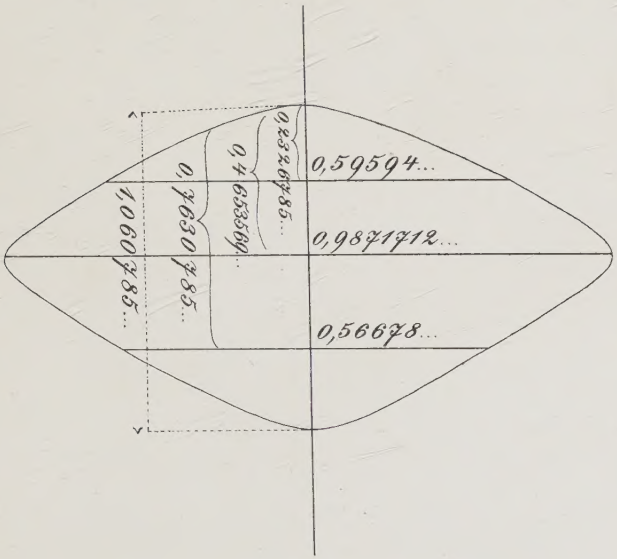
In gleicher Weise wie oben ergiebt sich für $r = 0$ der Maximal-Werth für c und wenn wiederum $v = 1$ gesetzt wird, so entsteht die Zahl 1,060785 . . .

Soll die Gestalt der ermittelten Curve durch Zeichnung angegeben werden, dann sind für möglichst viele Werthe von c die entsprechenden Werthe für r zu berechnen; für

$c = 0{,}2326785$. findet
man $r = 0{,}59594\ldots$;
für $c = 0{,}763071$ .. findet
man $r = 0{,}56678\ldots$

Die Gestalt der Curve, also die Form des Rotationskörpers wird nach diesen Angaben wie in umstehender Figur zu denken sein.

Bei $c = 0$ ist $r = 0$
„ $c = 0{,}2326785\ldots$ $r = 0{,}59594\ldots$
„ $c = 0{,}4653569\ldots$ $r = 0{,}9871712\ldots$
„ $c = 0{,}763071\ldots$ $r = 0{,}56678\ldots$
„ $c = 1{,}060785\ldots$ $r = 0$.


0,59594...
0,9871712...
0,56678...
0,4633986...
0,4630785...
1,0060285...